**Université de Versailles - Saint Quentin** **Année 2017/2018**
**M1 Théorie de Galois** **Maria Chlouveraki**

## Extensions algébriques de corps - TD 3

**1.** Décrire $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

**2.** Décrire $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

**3.** Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \mathbb{Q}$.

**4.** Calculer $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt{6})]$.

**5.** Décrire $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.

**6.** Décrire $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3})$.

**7.** Calculer $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\sqrt{3})]$.

**8.** Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$. Déduire que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ est une extension simple de $\mathbb{Q}$.

**9.** Décrire $\mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$. Est-ce que $\mathbb{Q}(i, \sqrt{2}) = \mathbb{Q}(i\sqrt{2})$ ? Montrer que $\mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$ est une extension simple de $\mathbb{Q}$.

**10.** Soit $\omega$ une racine cubique de l'unité. Décrire $\mathbb{Q}(\omega)$.

**11.** Soit $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tel que $\omega^3 = 1$. Est-ce que $\mathbb{Q}(\omega, \sqrt{2}) = \mathbb{Q}(\omega\sqrt{2})$ ? Montrer que $\mathbb{Q}(\omega, \sqrt{2})$ est une extension simple de $\mathbb{Q}$.

**12.** Soit $K/F$ et $c_1, c_2, \ldots, c_n \in K$. Si $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sont des éléments algébriques sur $F$, alors $F(c_1, c_2, \ldots, c_n)/F$ est finie et $F[c_1, c_2, \ldots, c_n] = F(c_1, c_2, \ldots, c_n)$.

**13.** Soit $K/F$ et $a, b \in K$. Si $a$ est algébrique sur $F$ et $b$ est algébrique sur $F(a)$, alors $b$ est algébrique sur $F$.